Problèmes de distances

1 Un premier problème pour commencer : et si la terre avait la forme d'un cube ?

On se donne un cube dans l'espace. Etant donné deux points de sa surface, on cherche à trouver la distance entre ces deux points c'est-à-dire la longueur du plus court chemin tracé sur le cube joignant ces deux points. On aimerait aussi dessiner un chemin qui réalise cette distance. Ce problème est bien sûr très simple quand les deux points se trouvent dans une même face du cube. Par contre, il devient intéressant lorsque les deux points sont sur des faces différentes. En particulier, il y a certain cas où le chemin de longueur minimale n'est pas unique.

2 Se déplacer dans une ville américaine

Beaucoup de villes d'Amérique du Nord sont quadrillées par des avenues Nord-Sud et des rues Est-Ouest. Pour se rendre d'un point à un autre, on se déplace le long d'horizontales et de verticales.

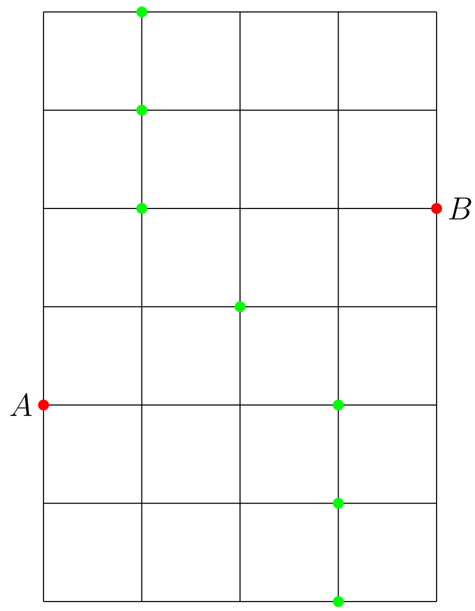
Il est assez facile de trouver la distance entre deux points. Pour simplifier le problème, on modélisera la ville par une grille carrée de côté 100 m. Les carrefours seront les sommets de la grille.

Par exemple, quelle est la distance entre le carrefour de la 40 ème rue et de la 3ème avenue et celui de la 110ème rue et de la 5ème avenue ? Peut-on donner une formule générale ? [1]

1. la distance est la distance minimale qu'on doit parcourir et non celle entre les deux points de la carte en ligne droite.

Centre de Manhattan

Par contre, étant donné deux carrefours A et B, il n'est simple de trouver la médiatrice de $[AB]$ c'est-à-dire les points équidistants de A et B. On peut voir un exemple ci-dessous. Comment résoudre ce problème ?



Médiatrice

Voici une version infinitésimale de cette question. En géométrie euclidienne, on sait que, dans un repère orthonormal, la distance entre les points $M(x;y)$ et $N(a;b)$ est

$$d(M,N) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$$

On définit une nouvelle distance

$$\delta(M,N) = |x-a| + |y-b|$$

On veut alors comprendre la géométrie associée à cette distance. Quels sont les analogues des cercles (ensemble des points à une distance fixée d'un point donné), des segments de droites (chemins entre deux points minimisant la distance), des médiatrices (ensemble des points équidistants de deux points donnés) ... ?

3 Et pour finir, le stockage des denrées

On doit stocker dans un entrepôt rectangulaire des denrées fragiles (ou des produits inflammables) le plus loin possible d'une source de contamination (bouches d'air, ampoules électriques...). Où doit-on les placer ?

On modélise le problème de la façon suivante : on se fixe deux points (les sources de contamination) dans un rectangle et on cherche le ou les points les plus éloignés de ces deux points [2]. On pourra faire de même avec 3 points.

2. On veut que la distance minimale entre nos denrées et les sources de contamination soit la plus grande possible. On ne veut pas seulement qu'une de ces distances soit grande bien entendu.