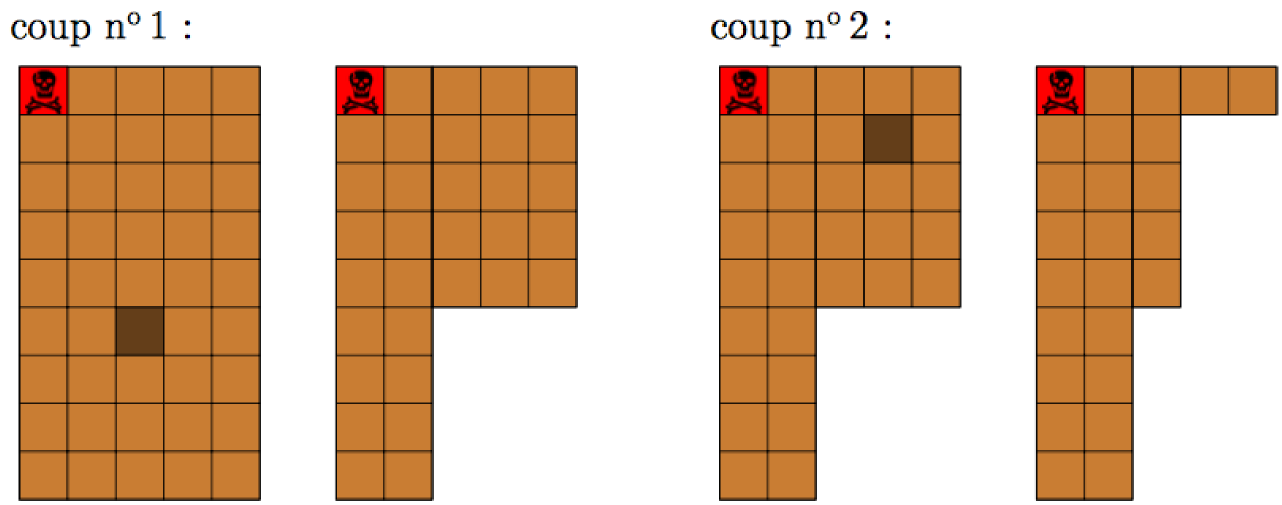
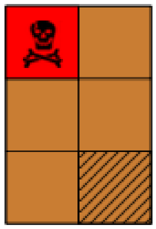
Jeu de la tablette de chocolat

Voici un jeu très simple dont les stratégies restent pourtant mal comprises. Le jeu se joue à deux, les joueurs jouent à tour de rôle. On considère une tablette de chocolat dont le carré en haut à gauche est empoisonné. Le joueur qui mange le carré empoisonné a perdu. Un joueur désigne un carré de chocolat et mange tous les carrés qui se trouvent en dessous et à droite de ce carré. Donnons un exemple décrivant deux coups consécutifs :

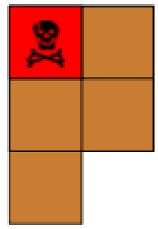


Le but est de trouver une stratégie gagnante pour le premier joueur, c'est-à-dire une stratégie qui permette de gagner **quoique fasse le second joueur**. Est-ce possible et comment faire ? On pourra commencer par des tablettes 2×2, 2×3, $2 \times n$ ainsi que par des tablettes carrées. On remarquera que ce n'est pas si simple à construire dans des cas plus compliqués. Il est fort intéressant d'essayer pour des tablettes 3×4 ou 3×5.

On sait par un argument abstrait que le premier joueur a toujours une stratégie gagnante. Voici un résumé très succinct de l'argument. On appelle position une configuration du jeu. On dit qu'elle est gagnante (G) si on peut gagner à coup sûr et perdante (P) si l'autre joueur peut gagner à coup sûr. Voici quelques exemples :

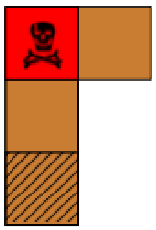


n° 1 : G

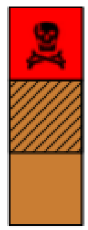


n° 2 : P

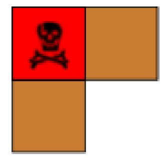
n° 3 : G



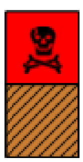
n° 4 : G



n° 5 : G



n° 6 : P



n° 7 : G

n° 8 : G

n° 9 : P

On peut vérifier que toute position est soit gagnante soit perdante quelle que soit la taille de la tablette. Il est très instructif de s'en convaincre soi-même, ce n'est pas si facile, c'est l'argument clé de cette démonstration. Ainsi la position initiale est gagnante pour l'un des joueurs. Si elle l'était pour le deuxième, c'est-à-dire perdante pour le premier, tout coup du premier joueur amènerait à une position gagnante du second. Néanmoins, si le premier joueur enlève le carré en bas à droite, les coups joués par le second joueur sont des coups que le premier aurait pu jouer, il devrait donc être perdant pour le second joueur, ce qui est contradictoire.

Par contre cette preuve mathématique ne donne pas d'algorithme pour trouver une stratégie gagnante pour une tablette $n \times m$ quelconque. On pourra essayer d'en trouver dans quelques cas et éventuellement de programmer le jeu pour donner des stratégies gagnantes.