académie Versailles
RÉGION ACADÉMIQUE ÎLE-DE-FRANCE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR, DE LA RECHERCHE ET DE L'INNOVATION

Olympiades nationales de mathématiques 2018

Liberté • Égalité • Fraternité
RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Métropole-Europe-Afrique-Orient-Inde

L'épreuve se déroule en deux parties indépendantes et indissociables de deux heures chacune, **les énoncés des deux parties sont donc séparés et distribués séparément à des moments différents**. Les copies rédigées sont ramassées à l'issue de la première partie (« exercices nationaux »). Une pause de cinq à quinze minutes est prévue, avant la seconde partie (« exercices académiques »). Des consignes de confinement peuvent être données selon la zone géographique de passation de l'épreuve.

Les calculatrices autonomes non communicantes par ondes radio sont autorisées.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Les énoncés doivent être rendus au moment de quitter définitivement la salle de composition.

Exercices nationaux

Les candidats traitent **deux exercices.** Ceux de la série S traitent les exercices numéros 1 (*Géométrie de l'à-peu-près*) et 2 (*Ensembles arithmétiques*), ceux des autres séries traitent les exercices numéros 1 (*Géométrie de l'à-peu-près*) et 3 (*Boules de même couleur*).

CASIO — Crédit Mutuel Enseignant — Google — Texas Instruments
Inria Inventeurs du monde numérique — Animath — hp — École Polytechnique Université Paris-Saclay

Exercice national numéro 1 (à traiter par tous les candidats)

Géométrie de l'à-peu-près

Mesures d'angles à peu près

On dit qu'un triangle ABC est à peu près rectangle en un sommet A si la mesure de l'angle en A est dans l'intervalle [75°, 105°]. On dit qu'un triangle ABC est à peu près isocèle en un sommet A si les mesures des angles en B et en C diffèrent de 15° au maximum.

1. ***a.*** Un triangle rectangle est-il à peu près rectangle ? Un triangle isocèle est-il à peu près isocèle ?
b. Un triangle peut-il être rectangle en deux sommets ? À peu près rectangle en deux sommets ? Le cas échéant, quand il est en plus acutangle (c'est-à-dire que tous ses angles sont aigus), est-il à peu près isocèle ?

2. Existe-t-il un triangle acutangle qui ne soit ni à peu près rectangle, ni à peu près isocèle ?

3. Écrire un programme (en langage naturel ou calculatrice), à recopier sur votre copie, testant si un triangle ABC dont on connaît les trois angles en A, B et C est à peu près isocèle.

Mesures de longueurs à peu près

Dans cette partie, on suppose qu'une unité de longueur a été donnée dans le plan, et on adopte les définitions suivantes :
- Deux points sont à peu près égaux si leur distance est inférieure ou égale à 0,1 ;
- Deux segments sont à peu près de même longueur si leurs longueurs diffèrent de 0,1 ou moins ;
- Un triangle est à peu près équilatéral si les longueurs de ses côtés diffèrent, deux à deux, de 0,1 ou moins.

4. ***a.*** Un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure (exactement) 1 peut-il être à peu près équilatéral ?
b. Un triangle rectangle peut-il être à peu près équilatéral ?

5. On considère un cercle, de centre O de rayon (exactement) 2 et deux points de ce cercle : A, fixe, et B, mobile. On appelle I le milieu du segment $[OA]$ et H le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).
a. Représenter sur une figure l'ensemble des points B pour lesquels H et I sont à peu près égaux. En calculer la longueur (le résultat sera donné arrondi au centième).
b. Si H et I sont à peu près égaux, le triangle AOB est-il à peu près équilatéral ?

Une statistique sur la population des triangles

On convient de caractériser tout triangle ABC par les mesures x et y de ses angles en A et B. Chaque triangle (et avec lui ceux qui ont les mêmes angles, qui lui sont donc semblables) est représenté par le point de coordonnées (x, y) dans le plan rapporté à un repère orthonormé. On choisit de représenter la mesure 10° par 1 cm.

6. Figurer sur un schéma (accompagné d'une légende explicite) :
a. Le domaine $\mathcal{T}$ constitué des points représentant tous les triangles ;
b. Le point E représentant les triangles équilatéraux ;
c. L'ensemble des points représentant les triangles rectangles.

7. ***a.*** Quelle partie $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles ?
b. Si on estime la proportion des triangles acutangles dans l'ensemble des triangles par le rapport de l'aire de $\mathcal{A}$ à l'aire de $\mathcal{T}$, quelle est cette proportion ?

8. Quelle partie $\mathcal{R}$ du domaine $\mathcal{T}$ représente les triangles acutangles à peu près rectangles (au sens de la première partie) ? Quelle est leur proportion (dans le même sens que ci-dessus) dans l'ensemble des triangles ?

Exercice national numéro 2 (à traiter par les candidats de la série S)

Ensembles arithmétiques

Un ensemble S de rationnels est un ensemble arithmétique (en abrégé EA) si pour tout couple (a, b) avec a et b appartenant à S, il existe un élément c de S tel que l'un des nombres a, b ou c est la moyenne arithmétique (c'est-à-dire la demi-somme) des deux autres. On souhaite déterminer tous les entiers n strictement positifs pour lesquels il existe un EA ayant n éléments.

1. *a.* Les ensembles suivants sont-ils des EA ? Justifier.

$S_1 = \{0,1,2\}$ $\quad$ $S_2 = \{0,1,2,3\}$ $\quad$ $S_3 = \{0,1,2,4\}$ $\quad$ $S_4 = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right\}$

b. Démontrer qu'il n'existe pas d'EA à 2 éléments. Que dire des singletons (ensembles à un seul élément) ?

c. Donner un EA ayant 5 éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

2. *a.* Outre $\frac{a+b}{2}$, quels sont les deux autres rationnels à envisager pour vérifier qu'un couple (a, b) d'éléments de S ne fait pas échec à la définition d'un EA ?

b. On désire écrire un algorithme qui teste si un ensemble est un EA. L'ensemble S est encodé sous la forme d'une liste S = [S[1],..,S[n]] de taille n. Par exemple la moyenne arithmétique du $i$ème et du $j$ème élément de S s'écrit (S[i]+S[j])/2.

```
fonction TesterEA(S=[S[1],..,S[n]] , n)
        Resultat ← Vrai
        Pour i de 1 à n
                Pour j de 1 à n
                [...]
                Fin Pour
        Fin Pour
        Renvoyer(Resultat)
```

On dispose de plus d'une fonction Appartient(r,S) qui renvoie Vrai lorsque le rationnel r appartient à la liste S et Faux sinon. Compléter le squelette de la fonction ci-contre (à recopier sur sa feuille de composition) pour qu'elle renvoie Vrai si et seulement si S =[S[1],..,S[n]] est un ensemble arithmétique de longueur n.

c. Modifier la fonction pour qu'elle réalise moins d'opérations dans le cas général (à recopier sur sa feuille de composition).

3. Soit n un entier strictement supérieur à 2 et S un EA ayant n éléments dont le plus grand est noté M et le plus petit m. Aux éléments a de S, on associe les nombres $\frac{2(a-m)}{M-m}$. On constitue ainsi l'ensemble S'. Démontrer que S' est un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0, 1 et 2.

4. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

Démontrer que pour tout nombre réel x:

- Si x appartient à S et $0 < x < 1$ alors $\frac{x+2}{2}$ appartient à S ;
- Si x appartient à S et $1 < x < 2$ alors $\frac{x}{2}$ appartient à S.

En déduire qu'il n'existe pas de EA ayant 4 éléments.

5. Soit S un EA ayant n éléments, inclus dans l'intervalle $[0,2]$, et contenant 0 et 2.

a. Démontrer que s'il existe un élément a_1 de S tel que $0 < a_1 < \frac{2}{3}$, alors il existe un élément a_2 de S tel que $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$.

En déduire que S ne contient aucun nombre strictement compris entre 0 et $\frac{2}{3}$.

b. Démontrer, de façon analogue, que S ne contient aucun nombre strictement compris entre $\frac{2}{3}$ et 1.

c. En déduire que $n \leq 5$.

6. Quels sont les entiers n pour lesquels il existe un EA ayant n éléments ?

Exercice national numéro 3 (à traiter par les candidats des séries autres que la série S)

Boules de même couleur

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules pouvant être de différentes couleurs.
Le jeu consiste à extraire au hasard une boule de l'urne, puis sans remettre celle-ci dans l'urne à extraire une seconde boule de l'urne. Le joueur a gagné lorsque les deux boules tirées sont de la même couleur.
On admet qu'à chaque tirage, toutes les boules de l'urne ont la même probabilité d'être tirées.
On dit que le jeu est équitable lorsque la probabilité $P(G)$ que le joueur gagne est égale à $\frac{1}{2}$.

1. ***a.*** Démontrer que si l'urne contient 10 boules dont 4 blanches et 6 rouges alors $P(G) = \frac{7}{15}$.
b. Calculer $P(G)$ lorsque l'urne contient 12 boules dont 4 blanches, 6 rouges et 2 noires.

2. Dans cette question, l'urne contient 6 boules rouges et d'autres boules qui sont toutes blanches.
a. Soit x le nombre de boules blanches contenues dans l'urne.
Démontrer que $P(G) = \frac{x(x-1)+30}{(x+6)(x+5)}$.
b. Combien faudrait-il de boules blanches pour que le jeu soit équitable ?

3. Dans cette question, l'urne ne contient que des boules de deux couleurs différentes.
a. On suppose que l'urne présente la configuration (a, b) c'est-à-dire qu'elle contient, par exemple, a boules rouges et b boules blanches. Démontrer que le jeu est équitable lorsque $n = (a-b)^2$.
b. Réciproquement démontrer que si n est le carré d'un entier p alors il existe deux entiers naturels a et b avec $a \geq b$ que l'on exprimera en fonction de p tels que la configuration (a, b) conduise à un jeu équitable.
c. Donner six couples (a, b) conduisant à un jeu équitable.

4. Dans cette question, l'urne contient des boules de trois couleurs différentes selon la configuration (a, b, c), c'est-à-dire, par exemple, a boules blanches, b rouges et c noires.
a. Montrer que si $n = 13$, le jeu est équitable lorsque $a^2 + b^2 + c^2 = 91$. En déduire une configuration (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour $n = 13$.
b. Pour un nombre quelconque de boules, montrer que si le couple (x, y) conduit à un jeu équitable pour deux couleurs alors il existe une unique valeur de z non nulle telle que le triplet (x, y, z) conduise également à un jeu équitable pour trois couleurs.
c. Donner un triplet (a, b, c) conduisant à un jeu équitable pour trois couleurs.

5. On suppose que l'urne contient des boules de m couleurs différentes où $m \geq 2$.
Démontrer que la configuration $(1,3,9, \dots, 3^{m-1})$ conduit à un jeu équitable.

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE

Olympiades académiques de mathématiques

Académie d'Aix-Marseille

Mercredi 14 mars 2018

Série S

Les calculatrices sont autorisées, à l'exclusion de tout autre appareil électronique.

Il est conseillé aux candidats qui ne pourraient formuler une réponse complète à une question d'exposer le bilan des initiatives qu'ils ont pu prendre.

Exercices académiques

Cette sous-épreuve comporte deux exercices, à traiter dans le temps imparti.

Pour chaque binôme une seule copie est à rendre, avec le nom des deux élèves ayant composé.

Durée de la composition : 2 heures

Ce sujet comporte 5 pages dont celle-ci.

Exercice 1 : Découpe de plaque d’acier

L’atelier de métallerie d’un chantier naval découpe des pièces de formes diverses dans des plaques d’acier carrées qu’il commande au laminoir.

Pour limiter les pertes de matière et donc les coûts de production, le chef d’atelier doit déterminer au préalable la taille des plaques carrées qu’il doit commander en fonction des pièces à découper.

Il arrive pour certaines commandes, que seules la forme et la surface des pièces à découper leurs soient transmises.

Dans chacune des trois parties suivantes on étudie la découpe de certains types de pièces.

Ces parties peuvent être traitées indépendamment l’une de l’autre.

On arrondira au besoin les longueurs au mm près, et les surfaces au cm^2 près.

Partie 1 : Découpe de pièces triangulaires

L’atelier doit produire une pièce qui a la forme d’un triangle équilatéral d’une surface de 20 m^2.

Le chef d’atelier envisage deux solutions de découpe comme illustré sur les schémas suivants :

Schéma n°1

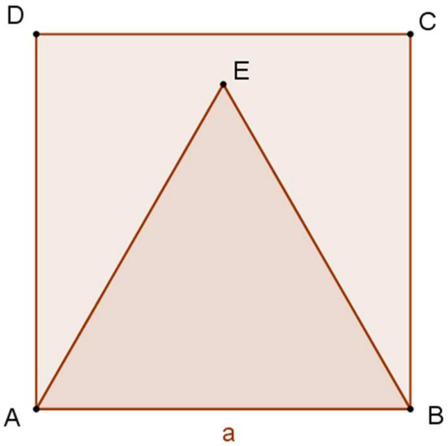
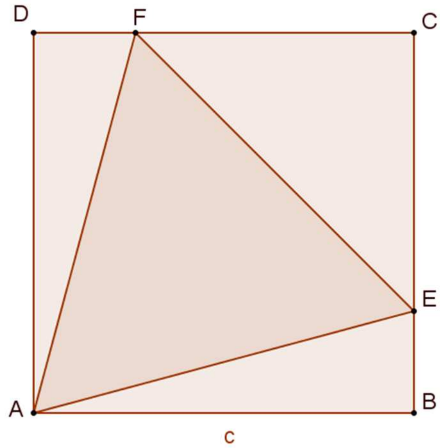


Schéma n°2



On note *a* le côté du triangle et *c* le côté du carré.

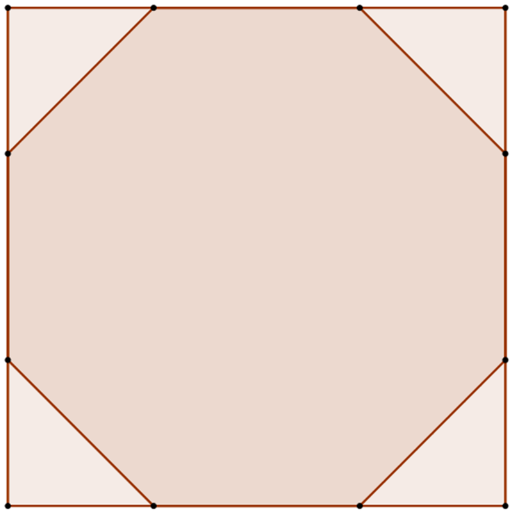
1) Schéma n°1 :

a. Exprimer la hauteur *h* du triangle en fonction de *a*.
b. En déduire le côté *a* du carré à construire pour respecter les contraintes.
c. Calculer la surface d’acier perdue avec cette méthode.

2) Schéma n°2 :

a. Justifier que l’angle $\widehat{BAE}$ mesure 15°.
b. En déduire le côté *c* du carré qu’il doit commander.
c. Calculer la surface d’acier perdue avec cette méthode.
d. Quel est le pourcentage d’acier gagné par rapport à la première proposition de découpe ?

Partie 2 : Découpe de pièces octogonales



L'atelier doit aussi produire des plaques d'acier qui sont des octogones réguliers, et pour lesquelles la surface doit toujours être de 20 m^2. Il retient le schéma de découpe suivant :

On note *a* le côté de l'octogone et *c* le côté du carré.

1) Démontrer que $ac = 10$

2) Démontrer que $c = a\left(1+\sqrt{2}\right)$

3) En déduire les valeurs exactes de a et c.

4) En déduire la surface d'acier perdue pour la découpe de cette pièce.

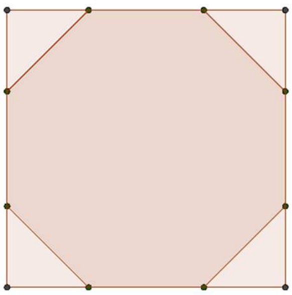
Partie 3 : Découpe d'un disque, ou presque

L'atelier reçoit une nouvelle commande pour un disque de métal de 20 m^2.

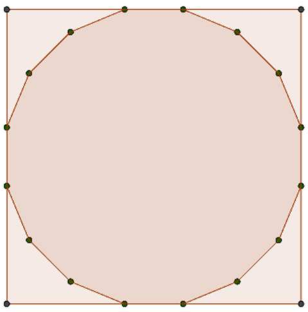
1) Quel devrait être le côté de la plaque carrée que l'atelier doit commander ?

Les outils disponibles à l'atelier ne permettent que des découpes rectilignes.
Un des ouvriers réalise qu'en augmentant le nombre de côtés du polygone, il obtiendra une forme se « rapprochant » d'un disque.

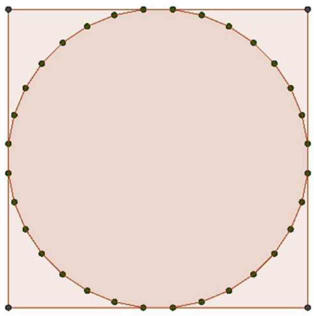
Il doit cependant se limiter à des pièces polygonales de 2^n côtés (avec $n \geq 3$) afin de pouvoir fixer ces dernières entre les étaux de la planche de découpe.



Polygone à 8 côtés



Polygone à 16 côtés



Polygone à 32 côtés

2) Quel est le côté de la plaque carrée qu'il doit commander pour pouvoir y découper un polygone régulier à 16 côtés d'une surface de 20 m^2 ?

3) Le chef d'atelier a déjà passé commande d'une plaque carrée prévue pour y tailler un véritable disque de 20 m^2. C'est dans cette plaque que va être effectuée la découpe d'un polygone régulier à 2^n côtés, comme représenté sur les schémas précédents.
Il est bien conscient qu'il n'obtiendra pas une pièce de 20 m^2 exactement mais souhaite néanmoins que la différence n'excède pas 0,01 m^2.
Quel est le nombre minimal de côtés du polygone à découper pour satisfaire à cette exigence ?

Exercice 2 : Construction d'un jeu de cartes

Manon et Julien veulent construire un jeu de cartes respectant les règles suivantes :

- *R_1 : « Sur chaque carte sont dessinés n symboles différents »*
- *R_2 : « Deux cartes distinctes ont toujours un et un seul symbole en commun »*
- *R_3 : « Aucun symbole n'est commun à toutes les cartes »*
- *R_4 : « Chaque symbole doit apparaître sur au moins deux cartes »*

Pour jouer, on présente deux cartes et le premier qui identifie le symbole commun à ces deux cartes remporte le pli.

On appellera « carte 1 », « carte 2 », …, « carte *c* » les *c* cartes constituant le jeu, et on notera « a », « b », « c », … les différents symboles utilisés.

1) Pour commencer, ils envisagent de réaliser un jeu simplifié qui ne contient que 3 cartes.
Manon prétend qu'en dessinant 2 symboles sur chaque carte, 3 symboles différents en tout sont suffisants. Proposer un tel jeu en donnant pour chaque carte les symboles qui y sont dessinés.

2) Ils veulent maintenant réaliser un jeu de 7 cartes, dans lequel chaque symbole n'est partagé que par une seule paire de cartes.

  a. Justifier qu'une carte de ce jeu doit contenir 6 symboles.
  b. Combien de symboles différents seront nécessaires ?
  c. Avec 300 symboles différents, de combien de cartes le jeu aurait-il été constitué ?

3) N'étant pas satisfaits du résultat, ils tentent de construire un jeu de 7 cartes contenant chacune 3 symboles et rajoutent la règle suivante :
R_5 : « Chaque symbole apparaît sur 3 cartes exactement »
Justifier qu'un tel jeu nécessite 7 symboles distincts.

4) Après plusieurs tentatives infructueuses, ils ont finalement réussi à réaliser un tel jeu à l'aide de l'algorithme suivant :

```
Pour i allant de 1 à 7
    Pour j allant de 1 à 7
        Si il y a déjà 3 « 1 » dans la ligne i
        ou il y a déjà 3 « 1 » dans la colonne j,
        ou il existe k < i et l < j tel que il y ait des « 1 » dans les cases (k ; j), (k ; l) et (i ; l ).
            Alors, écrire 0 dans la case (i ; j)
            Sinon, écrire 1 dans la case (i ; j)
        Fin Si-Sinon
    Fin Pour
Fin pour
```

Celui-ci leur a permis de compléter un tableau à 7 lignes et 7 colonnes dans lequel une ligne correspond à une carte et une colonne à un symbole.
la case (i ; j) désigne la case située à l'intersection de la ligne i et de la colonne j.

a. Que signifie l'écriture d'un « 1 » dans la case (i ; j) ?

b. Quelle règle du jeu conduit à écrire « 0 » dans la case (i ; j) s'il y a déjà 3 « 1 » dans la ligne i ?

c. Quelle règle du jeu conduit à écrire « 0 » dans la case (i ; j) s'il y a déjà 3 « 1 » dans la colonne j ?

d. Quelle règle du jeu conduit à écrire « 0 » dans la case (i ; j) s'il existe k < i et l < j tel que il y ait des « 1 » dans les cases (k ; j), (k ; l) et (i ; l) ?

e. Compléter le tableau suivant en appliquant cet algorithme.

		a	b	c	d	e	f	g
		1	2	3	4	5	6	7
Carte 1	1	1	1	1	0	0	0	0
Carte 2	2							
Carte 3	3							
Carte 4	4							
Carte 5	5							
Carte 6	6							
Carte 7	7							

5) Ils ont réussi à construire un jeu de 57 cartes dans lequel chaque carte comporte 8 symboles et où chaque symbole apparaît sur 8 cartes différentes.
Ils ont malencontreusement perdu deux cartes. Combien y a-t-il de symboles qui n'apparaissent que 7 fois ?

6) Pour réussir la construction d'un tel jeu, ils avaient généralisé la règle R_5 qui est alors devenue :
« Chaque symbole apparaît sur n cartes exactement ».
On utilisera les notations suivantes :
- *c* le nombre de cartes.
- *n* le nombre de symboles par cartes (qui est aussi le nombre de cartes où apparaît un symbole donné).
- *s* le nombre de symboles différents utilisés dans le jeu.
- *N* le nombre total de symboles apparaissant dans le jeu.

a. En comptant de deux manières différentes le nombre total de symboles dans le jeu, démontrer qu'il y a le même nombre de cartes que de symboles différents dans le jeu.

b. Combien de paires distinctes peut-on réaliser avec les *c* cartes du jeu ?

c. Avec les *n* cartes ayant un symbole commun, combien de paires peut-on réaliser ?

d. Etablir que $c = n(n-1)+1$