

TFJM²

Problèmes du 9^{ème} Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

VERSION 1.1 MISE À JOUR LE 16 JANVIER 2019

PRÉAMBULE

Ces problèmes sont proposés dans le cadre du Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens. Ce sont des problèmes difficiles, proposés par des chercheur·se·s et étudiant·e·s en mathématiques. Ils n'admettent pas toujours, à la connaissance du jury, de solution complète, mais sont accessibles à des lycéen·ne·s, c'est-à-dire que les auteur·e·s sont certain·e·s qu'un travail de recherche élémentaire peut être mené sur ces problèmes. Le jury n'attend pas des participant·e·s qu'elles/ils résolvent entièrement un problème, mais qu'elles/ils en comprennent les enjeux, résolvent des cas particuliers, repèrent les difficultés et proposent des pistes de recherche. Attention, les questions ne sont pas toujours classées par ordre croissant de difficulté. Enfin, il n'est pas nécessaire de traiter tous les problèmes : chaque équipe peut en refuser un certain nombre sans pénalité. On se reportera au règlement pour plus de détails.

Ces problèmes sont distribués sous licence CC-BY-SA 4.0. En cas de questions concernant le tournoi ou les énoncés, consulter le site www.tfjm.org ou contacter les organisateur·rice·s à l'adresse contact@tfjm.org.

TABLE DES MATIÈRES

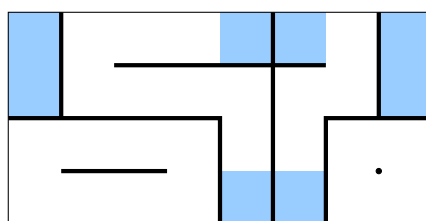
Préambule	1
1. Une commande disproportionnée	2
2. Balade à vélo	3
3. Entrée en gare	4
4. Pizzas végétariennes	6
5. Espions sous surveillance	7
6. Caméléons	9
7. Distribution de chocolats	10
8. Los Angeles	12

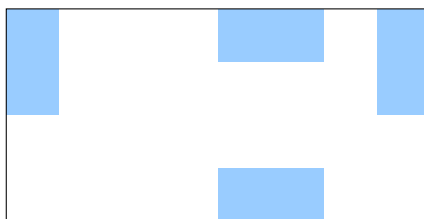
MOTS-CLÉS : 1. combinatoire — 2. analyse, optimisation — 3. combinatoire, optimisation — 4. probabilités — 5. géométrie — 6. théorie des graphes, coloriage — 7. arithmétique — 8. combinatoire, géométrie.

1. UNE COMMANDE DISPROPORTIONNÉE

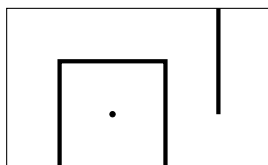
Donald vient de construire une nouvelle maison. Il ne lui reste plus qu'à ajouter des cloisons à l'intérieur. Sa maison est un rectangle de taille $a \times b$, avec a et b des entiers ≥ 2 , que l'on décompose en cases carrées de côté 1. Donald est très capricieux. Dans sa maison, il ne veut avoir que des couloirs : chaque case qui n'est pas sur un bord du bâtiment (case *interne*) doit avoir exactement deux cases voisines. Pour une case qui est sur un bord (case *externe*), elle peut avoir soit deux cases voisines, soit une seule. Dans ce dernier cas, on dit qu'il s'agit d'une *sortie* (représentée en bleu sur la figure 1).

Malheureusement, Donald a commis une erreur lors de la commande. Emporté par son enthousiasme, il a commandé des murs trop longs ! Il n'a à sa disposition que des *bimurs*, c'est-à-dire des cloisons de longueur 2. Deux bimurs peuvent s'intersecter en un point (pour former une croix), mais ils ne peuvent pas se superposer. Donald cherche à savoir quels sont les plans possibles pour sa nouvelle maison avec ces contraintes.



FIGURE 3. Exemple d'ensemble constructible sur un plan 8×4 .

4. En fonction de a et b , est-il possible de construire une nouvelle maison où il n'y a jamais deux bimurs consécutifs (formant un mur de longueur 4 ou plus) ? Par exemple le plan de la figure 4 est valide, mais le plan de la figure 1 n'est plus accepté. Proposer différentes constructions générales lorsque c'est possible.

FIGURE 4. Exemple de plan 5×3 constructible sans bimurs consécutifs.

5. En fonction de a et b , quelles sont les cases externes qui appartiennent à un ensemble constructible ? Combien d'éléments peut contenir un ensemble constructible ?

6. En fonction de a et b , caractériser les ensembles constructibles.

7. Vladimir, un ami de Donald, veut construire également une nouvelle maison mais il a commandé des trimurs, c'est à dire des murs de longueur 3. Reprendre le problème dans ce cas, et dans le cas plus général de m -murs.

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

2. BALADE À VÉLO

Martin, Anna et Carole sont allés se promener à vélo. Au moment où ils décident de rentrer, ils découvrent que Martin s'est fait voler son vélo. Pour rentrer, ils n'ont plus que deux vélos pour trois.

On considère qu'un individu à pied se déplace à vitesse 1 et un individu à vélo se déplace à vitesse $v \in \mathbb{R}$, $v > 1$. Initialement, les trois amis et leurs deux vélos sont au point de départ. Ils sont à distance 1 de chez eux. À tout moment, un promeneur peut prendre un vélo qui est au même endroit que lui sur le chemin et avancer avec ce vélo. Un promeneur à vélo peut toujours déposer son vélo là où il est et continuer à pied. On suppose que les promeneurs ne reviennent jamais en arrière.

Dans le cas $v = 2$, une organisation possible est la suivante. Au départ ($t = 0$), Anna et Carole commencent à vélo. Martin part à pieds. Au temps $t = 1/4$, arrivée à la moitié du trajet, Carole pose son vélo et continue à pied. Anna continue à vélo. Au temps $t = 1/2$, Martin récupère le vélo laissé par Carole et Anna arrive au bout du chemin. Enfin, au temps $t = 3/4$, Martin et Carole arrivent en même temps au bout du chemin. Ce trajet est représenté sur la figure 5.

Les promeneurs cherchent à minimiser la durée T nécessaire pour arriver tous les trois au bout du chemin. Dans l'exemple, $T = 3/4$.

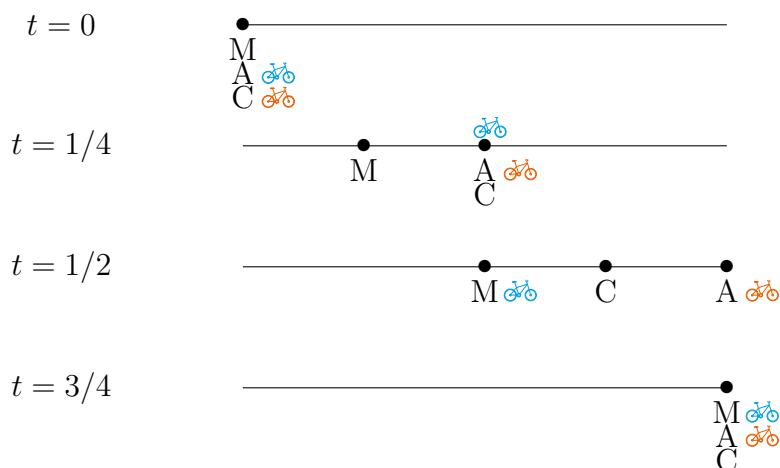


FIGURE 5. Une organisation possible pour Martin, Anna et Carole.

1. En fonction de v , quelle est T_{\min} la plus petite valeur possible pour T ? Donner un exemple d'organisation telle que $T = T_{\min}$.
2. À présent, il y a n promeneurs avec $0 < k < n$ vélos. Que vaut T_{\min} en fonction de v , k et n ? Comment atteindre ce minimum? On pourra commencer par les cas $k = 1$, $k = 2$ et $k = n - 1$.
3. Désormais, les promeneurs s'autorisent à revenir en arrière et un promeneur à vélo peut transporter avec lui un vélo supplémentaire (mais un seul). Reprendre les questions précédentes, si cela permet d'améliorer T_{\min} .
4. Le chemin que les cyclistes doivent emprunter pour rentrer de leur promenade est en pente. Un vélo qui est posé seul se déplace avec une vitesse $p \in \mathbb{R}$, avec $p > 0$ si le chemin descend, c'est-à-dire que le vélo avance tout seul, et $p < 0$ si le chemin monte, c'est-à-dire que le vélo recule tout seul. Reprendre les questions précédentes dans ce cas, en fonction du paramètre p .
5. Les promeneurs disposent de k vélos qui avancent à vitesse v , et ℓ trotinettes qui avancent à vitesse w . Reprendre les questions précédentes dans ce cas.
6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

3. ENTRÉE EN GARE

Julie vient d'être nommée cheffe de gare. Elle doit ranger n trains dans l'entrepôt pour la nuit. Les trains arrivent un par un dans un ordre bien précis que Julie ne choisit pas. C'est l'*ordre d'arrivée*. Les trains doivent également repartir dans un ordre précis le lendemain matin. On note "1" le train qui doit repartir en premier, "2" celui qui doit repartir en deuxième et ainsi de suite. Lorsqu'un train arrive, Julie décide de la voie sur laquelle garer le train. Le lendemain, il faut que le premier train à partir puisse accéder directement à la sortie, sans être bloqué par un autre train, et ainsi de suite : tous les trains doivent pouvoir sortir dans l'ordre prévu.

Chaque voie peut contenir jusqu'à n trains consécutifs. Il existe trois types de voies différents :

- les *impasses*, où les trains arrivent par la gauche le soir et repartent par la gauche le matin ;
- les *voies à sens unique*, où les trains arrivent par la gauche le soir et repartent par la droite le matin ;
- les *voies à double sens*, où les trains peuvent arriver des deux côtés le soir et repartir des deux côtés le matin.

Si Julie parvient à trouver une solution qui permet de faire repartir tous les trains dans l'ordre avec les voies à sa disposition, on dit que leur ordre d'arrivée est *admissible*. Par exemple, si Julie doit stocker trois trains et qu'elle a seulement une impasse à sa disposition, l'ordre d'arrivée $(3, 2, 1)$ est admissible, mais pas $(1, 2, 3)$.

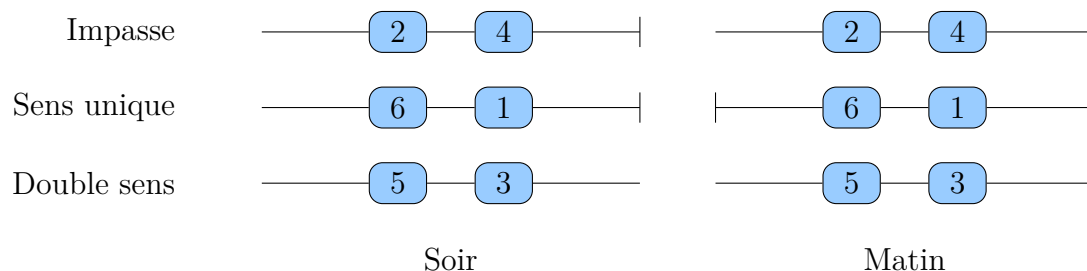


FIGURE 6. Exemple pour 6 trains avec une voie de chaque type.

La figure 6 représente un exemple avec 6 trains et une voie de chaque type. L'ordre d'arrivée est $(1, 5, 3, 4, 6, 2)$. Cet ordre est admissible. On remarque qu'il y a plusieurs possibilités pour l'ordre sur la voie à double sens : on peut choisir d'entrer par la droite ou par la gauche.

1. On s'intéresse à une gare ne possédant qu'une seule voie. À quelles conditions un ordre d'arrivée est-il admissible :

- (a) si la voie est une impasse ?
- (b) si la voie est à sens unique ?
- (c) si la voie est à double sens ?

Soit un entier $p \geq 2$ tel que p divise n . On suppose que les trains arrivent dans l'ordre suivant :

$$(p, p-1, \dots, 1, 2p, 2p-1, \dots, 2p-(p-1), \dots, n, n-1, \dots, n-(p-1)).$$

2. Quel est le nombre minimal de voies nécessaires pour que cet ordre soit admissible :

- (a) si les voies sont toutes des impasses ?
- (b) si les voies sont toutes à sens unique ?
- (c) si les voies sont toutes à double sens ?

3. Quel est le plus petit nombre de voies pour lequel tous les ordres d'arrivée sont admissibles :

- (a) si les voies sont toutes des impasses ?
- (b) si les voies sont toutes à sens unique ?
- (c) si les voies sont toutes à double sens ?

4. On suppose dans cette question qu'il n'y a qu'une seule voie et qu'il s'agit d'une voie à double sens. Désormais, on possède une machine qui permet à un train de passer au dessus d'un autre train. Mais cette opération prend 1 heure. Dans le pire des cas, combien de temps faut-il pour traiter les n trains ?

5. Reprendre la question précédente avec plusieurs voies et éventuellement des impasses ou des voies à sens unique.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

4. PIZZAS VÉGÉTARIENNES

Sophie aime beaucoup les pizzas, mais elle est végétarienne. Elle a face à elle p piles ($p \geq 2$) qui contiennent respectivement a_1, a_2, \dots, a_p boîtes, chaque boîte contenant exactement une pizza. Sophie sait que parmi les $n = a_1 + a_2 + \dots + a_p$ pizzas, il y en a exactement k qui sont végétariennes. Elle souhaite en trouver une le plus vite possible.

Chaque minute, Sophie choisit une boîte sur le dessus d'une des piles, ouvre cette boîte et regarde la pizza à l'intérieur. Puis elle replace la boîte sur le dessus d'une autre pile (ou éventuellement de la même pile). Si une pile est vide, il est toujours possible de poser des boîtes dessus. En revanche il n'est pas possible de créer une $(p+1)$ -ième pile. On note $M_k(a_1, \dots, a_p)$ le plus petit entier tel que Sophie a une stratégie qui lui permet d'être sûre de trouver une pizza végétarienne en $M_k(a_1, \dots, a_p)$ minutes, quelle que soit la position des pizzas végétariennes dans les piles de départ.

Par exemple, on a $M_1(1, 2) = 3$. S'il n'y a qu'une pizza végétarienne, Sophie doit nécessairement ouvrir les trois boîtes pour être sûre de trouver la bonne. De plus, elle peut y arriver en 3 minutes en ouvrant la boîte de la première pile, puis en ouvrant la boîte en haut de la seconde pile, en la déplaçant sur la première, et enfin en ouvrant la boîte qui reste dans la seconde pile.

1. Estimer $M_k(a_1, \dots, a_p)$ en fonction des valeurs de p et de k .

Commencer par étudier les cas suivants :

- | | |
|---------------------------------|--|
| (a) $k = n - 1$; | (d) $p = 2$ et k quelconque ; |
| (b) $p = 2$ et $k = 1$; | (e) $a_1 = a_2 = \dots = a_p = k$; |
| (c) p quelconque et $k = 1$; | (f) $a_1 = a_2 = \dots = a_p$ et k quelconque. |

On suppose maintenant que Sophie est dans une pièce de hauteur h avec $a_i \leq h$ pour tout i . Les boîtes à pizza sont d'épaisseur 1. Par conséquent, Sophie ne peut pas empiler plus de h boîtes sur la même pile.

2. En fonction de p , n et k , quelles sont les valeurs de h pour lesquelles Sophie peut s'assurer de trouver une pizza végétarienne quelle que soit la disposition initiale ? On pourra commencer par traiter les mêmes cas que dans la question 1.

3. On se place dans le même cas que la question 2 (pièce de hauteur finie). On note $M_k^h(a_1, \dots, a_p)$ le plus petit entier tel que Sophie a une stratégie qui lui permet d'être sûre de trouver une pizza végétarienne en $M_k^h(a_1, \dots, a_p)$ minutes, quelle que soit la position des pizzas végétariennes dans les piles de départ, si une telle stratégie existe. Estimer $M_k^h(a_1, \dots, a_p)$. On pourra commencer par traiter les mêmes cas que dans la question 1.

4. On suppose à nouveau que la pièce est de hauteur infinie. On suppose également que les piles sont alignées, de la gauche vers la droite. Sophie a mangé trop de pizza et souhaite désormais se déplacer le moins possible. Lorsqu'elle prend une boîte à pizza sur une pile, il ne peut donc la reposer que sur une pile voisine (ou éventuellement sur la même pile). Reprendre les questions 1 et 3 dans ce cadre.

5. À présent, $k = 1$ et Sophie sait que la pizza végétarienne a été placée aléatoirement dans une des n boîtes, de façon uniforme, c'est-à-dire que chaque boîte contient la pizza végétarienne avec probabilité $\frac{1}{n}$. Elle cherche à minimiser le temps moyen nécessaire pour trouver la pizza. La moyenne est effectuée sur l'ensemble des positions possibles de la pizza. Reprendre les questions précédentes dans ce cadre.

6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

5. ESPIONS SOUS SURVEILLANCE

Les services de renseignement veulent recruter quelqu'un pour devenir l'agent 008. Ils ont reçu plusieurs dossiers et organisent un concours pour départager les candidats. L'épreuve se déroule dans un bunker en forme de disque de rayon 1. Pour espacer les candidats au maximum, leurs tables sont sur les bords du disque et forment un n -gone régulier. Mais afin d'empêcher toute possibilité de triche, il est nécessaire de *cloisonner* la salle, c'est à dire d'empêcher les candidats de se voir entre eux.

Tristan est chargé d'organiser l'épreuve. Il décide d'installer des cloisons. Une cloison peut être installée entre n'importe quels deux points de la salle, sauf si elle passe à l'endroit exact où se trouve la table d'un candidat. On dit que deux cloisons *se coupent* lorsque les segments s'intersectent (sauf si le point d'intersection est l'extrémité d'une des cloisons).

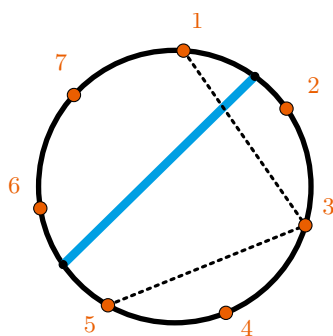


FIGURE 7. Exemple avec $n = 7$ et des cloisons Kôrde.

Tristan décide de se fournir en cloisons chez l'entreprise Kôrde. Cette entreprise peut construire des cloisons de toutes tailles mais il est nécessaire de les fixer aux murs de la salle, comme sur la figure 7. Sur cet exemple, les cloisons de l'entreprise Kôrde empêchent les candidats 1 et 3 de se voir, mais pas les candidats 3 et 5.

1. Quel est le nombre minimal de cloisons à poser pour cloisonner la salle dans les cas suivants :

- (a) si les cloisons peuvent se couper ?
- (b) si les cloisons ne peuvent pas se couper ?

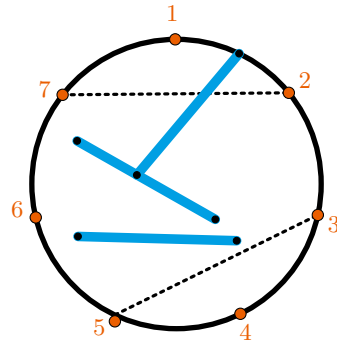
À partir de maintenant et jusqu'à la fin du problème, deux cloisons ne peuvent pas se couper.

Finalement, les services de renseignement ont décidé de profiter du savoir-faire de Tristan pour organiser une large vague de recrutement. Ils ont publié p annonces pour des postes différents. Il y a k candidats pour chaque poste, soit un total de $n = pk$ candidats. Les n candidats forment toujours un n -gone régulier inscrit dans le cercle qui borde la salle mais, pour chaque poste, les k candidats à ce poste sont répartis d'une manière quelconque parmi les n tables. Tristan a reçu une seule consigne : il faut absolument que deux candidats au même poste ne puissent pas se voir.

2. Trouver le plus petit entier m tel que Tristan soit sûr de pouvoir empêcher la triche en installant m cloisons Kôrde, quelle que soit la répartition des candidats aux k postes, dans les cas suivants :

- (a) pour $p = 2$ et k quelconque ;
- (b) pour $k = 2$ et p quelconque ;
- (c) pour des valeurs quelconques de p et k .

3. Tristan avait mal compris la consigne : deux candidats pour un même poste peuvent se voir, en revanche il est impératif que des candidats à des postes différents ne puissent pas se voir pendant l'examen. Reprendre la question précédente dans ce cas.

FIGURE 8. Exemple avec $n = 7$ et des cloisons Tayfix.

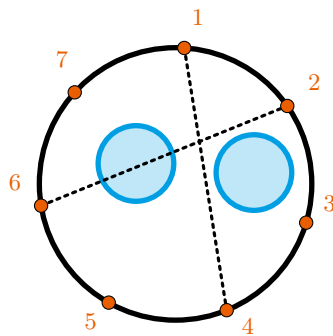
On revient dans le cas initial où tous les candidats doivent être séparés. Tristan est mécontent de l'entreprise Kôrde. Il décide de changer de fournisseur et se tourne vers l'entreprise Tayfix. Cette entreprise produit uniquement des cloisons de longueur $L \in \mathbb{R}$ fixe, mais elles peuvent être placées en n'importe quel point du disque, comme sur la figure 8. Sur cet exemple, les cloisons de l'entreprise Tayfix empêchent les candidats 2 et 7 de se voir, mais pas les candidats 3 et 5. On considère que les extrémités des cloisons bloquent la vue.

4. Tristan n'est pas certain que cette solution fonctionne toujours.

- Pour quelles valeur de L est-il possible de cloisonner la salle, pour $n = 2, 3, 4, 5$?
- Pour quelles valeur de n peut-on trouver une longueur $L > 1$ telle qu'il est possible de cloisonner la salle avec des cloisons de longueur L ?
- En fonction de n , estimer le plus grand L tel qu'il qu'il est possible de cloisonner la salle avec des cloisons de de longueur L . Existe-il un réel $L > 1$ pour lequel il est toujours possible de cloisonner la salle, quelle que soit la valeur de n ?

Les cloisons Tayfix ne suffisent pas à empêcher les candidats de s'espionner les uns les autres en utilisant des appareils à ultrasons. Tristan décide de remplacer les cloisons par des piliers en béton. Il contacte l'entreprise Unkalibr, qui propose d'installer des piliers circulaires de rayon $r \in \mathbb{R}$. Les piliers doivent être inclus entièrement dans la salle et ne peuvent pas se recouvrir, mais deux piliers peuvent être tangents. Sur la figure 9, les piliers empêchent les candidats 2 et 6 de se voir, mais pas les candidats 1 et 4.

5. En fonction de n , quels sont les rayons r pour lesquels il est possible de cloisonner la salle avec des piliers ? Commencer par étudier des petites valeurs de n , puis proposer des bornes sur les rayons r possibles dans le cas général.

FIGURE 9. Exemple avec $n = 7$ et des piliers Unkalibr.

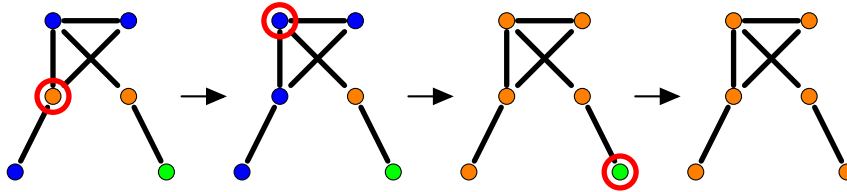
6. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

6. CAMÉLÉONS

Victor est biologiste et étudie une population de caméléons. Ces caméléons sont reliés par des liens d'amitié. Ces liens sont représentés par un graphe, c'est-à-dire un ensemble de sommets, reliés par un ensemble d'arêtes. Les sommets sont les caméléons et deux caméléons amis sont reliés par une arête.

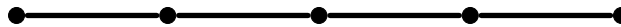
On suppose que les caméléons peuvent prendre k couleurs différentes, qu'on numérote de 1 à k . Un caméléon passe d'une couleur i à la couleur j dans deux cas : soit parce que Victor le lui demande, soit parce que l'un de ses amis de couleur i vient de passer à la couleur j . Ainsi, lorsque Victor demande à un caméléon A de changer de couleur, tous les caméléons amis de A qui étaient de la même couleur que A font de même, puis leurs amis, etc.

Soit \mathcal{G} un graphe représentant une population de caméléons et \mathcal{C} un coloriage du graphe, c'est-à-dire la donnée de la couleur des caméléons au départ. Victor veut faire en sorte que tous les caméléons soient de la même couleur, mais en minimisant le nombre de fois où il doit demander à un caméléon de changer de couleur. On appelle *difficulté* de \mathcal{C} le nombre minimal de demandes nécessaires pour que tous les caméléons soient de la même couleur. Pour un graphe \mathcal{G} donné, on note $D_k(\mathcal{G})$ la difficulté maximale possible d'un coloriage de \mathcal{G} avec k couleurs. Cela correspond à la pire situation possible pour Victor.

FIGURE 10. Exemple avec $k = 3$.

La figure 10 représente un exemple avec 6 caméléons et $k = 3$ couleurs. Pour ce graphe \mathcal{G} , à chaque étape, Victor demande au caméléon entouré en rouge de changer de couleur. Il demande au premier caméléon de devenir bleu, ce qui n'entraîne aucun autre changement car ce caméléon n'a pas d'ami de la même couleur. Ensuite elle demande à un caméléon bleu de devenir orange. Par propagation, tous les amis bleus de ce caméléon changent de couleur, ainsi que les amis de ses amis. Enfin, Victor demande au dernier caméléon de devenir orange et tous les caméléons sont désormais de la même couleur. Dans cet exemple, Victor a réussi en trois étapes. Donc $D_3(\mathcal{G}) \leq 3$.

On note \mathcal{P}_n le graphe constitué de n sommets alignés, chacun relié à ses voisins de droite et de gauche lorsqu'ils existent.

FIGURE 11. Le segment \mathcal{P}_5 .

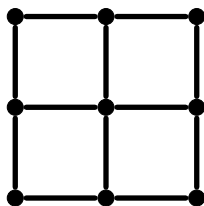
1. Déterminer ou donner un encadrement de $D_k(\mathcal{P}_n)$ dans les cas suivants :

- (a) $k = 2$;
- (b) $k = 3$;
- (c) k quelconque.

On note $\mathcal{R}_{n,m}$ le réseau rectangulaire de taille $n \times m$.

2. La suite $(D_k(\mathcal{R}_{n,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle croissante ?

3. Déterminer ou encadrer $D_k(\mathcal{R}_{n,m})$ en fonction de k , n et m .

FIGURE 12. Le rectangle $\mathcal{R}_{3,3}$

4. Soit \mathcal{G} un graphe connexe quelconque. Un graphe connexe est un graphe tel qu'il est toujours possible de passer d'un sommet à l'autre par une suite d'arêtes. Dans chacun des trois cas suivant, D_k peut-il augmenter ? Diminuer ? Si oui, de combien au maximum ?

- (a) Un nouveau caméléon arrive et cause une dispute entre deux amis : il rompt leur lien d'amitié mais devient l'ami de chacun d'entre eux.
- (b) Deux caméléons deviennent amis.
- (c) Un nouveau caméléon arrive et devient ami avec deux caméléons (qui ne sont pas nécessairement amis entre eux).

5. Dans cette question uniquement, Victor décide qu'il est préférable d'avoir un interlocuteur unique. Il commence par choisir un caméléon et ne peut ensuite s'adresser qu'à lui pour demander des changements de couleur. Quel est l'impact de cette décision :

- (a) dans le cas du segment \mathcal{P}_n ?
- (b) dans le cas du rectangle $\mathcal{R}_{n,m}$?
- (c) dans le cas général ?

6. Soient s et a deux entiers. Parmi tous les graphes \mathcal{G} connexes à s sommets et a arêtes, quels sont ceux qui minimisent $D_k(\mathcal{G})$? Quels sont ceux qui maximisent $D_k(\mathcal{G})$? Commencer par étudier les cas $a = s - 1$, $a = 2s$ et $a = \frac{s(s-1)}{2}$.

7. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *

7. DISTRIBUTION DE CHOCOLATS

Papi Théo offre des chocolats à ses petits enfants. Ses n petits-enfants sont placés en ligne, numérotés de 1 à n . Chaque jour il ouvre une boîte de chocolats. Le premier jour, il donne la boîte au premier enfant. Celui-ci prend un chocolat, puis passe la boîte à son voisin, qui se sert, et ainsi de suite. Par souci d'équité, pour que ça ne soit pas toujours le même qui se serve en premier, le deuxième jour c'est le deuxième enfant qui reçoit la boîte pleine, prend un chocolat, puis la passe à son voisin, etc. Lorsque la boîte arrive à l'enfant n , celui-ci la passe ensuite à l'enfant 1.

Mais les boîtes de chocolats sont de taille variable. Le premier jour, la boîte ne contient qu'un unique chocolat. Le deuxième jour, elle en contient 2. Et ainsi de suite, le j -ième jour la boîte contient j chocolats.

La figure 13 montre le cas de 4 petits-enfants, après 5 jours. Les petits-enfants ont reçu respectivement 5, 3, 4 et 3 chocolats. Le numéro inscrit sur chaque chocolat correspond au jour où il a été distribué.

On dit qu'à un instant donné une configuration est *équilibrée* si, à cet instant, tous les petits-enfants ont reçu le même nombre de chocolats.

1. Selon la valeur de n , la configuration est-elle équilibrée après n jours ?

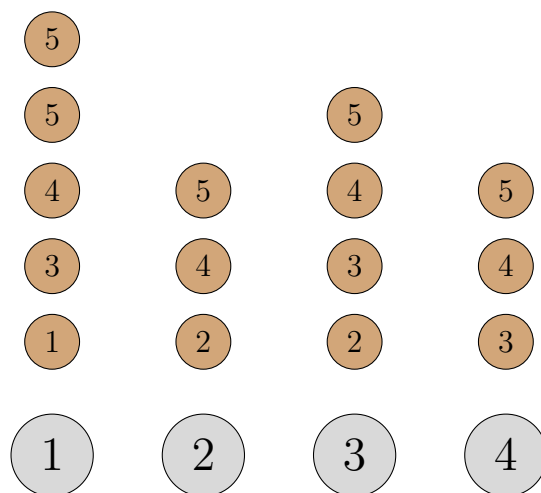


FIGURE 13. Exemple avec 4 petits-enfants après 5 jours.

2. Selon les valeurs de n , existe-t-il un jour à la fin duquel la configuration est équilibrée? Si oui, quel est le premier jour où cela se produit?

Papi Théo ne peut pas acheter des boîtes de chocolats toujours plus grandes! Il décide de s'organiser différemment. On note $b(j)$ le nombre de chocolats dans la boîte le j -ième jour. Les questions précédentes correspondent à $b(j) = j$.

3. Pour limiter l'inflation de la taille des boîtes de chocolats, Papi Théo décide que tous les d jours, il faut repartir à zéro. Il choisit des boîtes telles que $b(j)$ est le reste de la division euclidienne de j par d . Selon les valeurs de n et d , existe-t-il un jour à la fin duquel la configuration est équilibrée? Si oui, quel est le premier jour où cela se produit?

Papi Théo choisit maintenant d entiers (b_1, b_2, \dots, b_d) et définit la fonction b de sorte que pour tout entier j , $b(j) = b_\ell$ où ℓ est le reste de la division euclidienne de j par d . Le cas précédent correspond à choisir $b_i = i$, pour tous les $1 \leq i < d$ et $b_d = 0$.

4. Selon les valeurs de n , d et des entiers positifs (c_1, c_2, \dots, c_n) , est-il possible de choisir les entiers (b_1, b_2, \dots, b_d) de sorte que, après PPCM(n, d) jours, l'enfant i ait reçu exactement c_i chocolats, pour tout $1 \leq i \leq n$?

On dit qu'un mode de distribution est *équitable* s'il existe une infinité de jours à la fin desquels la configuration est équilibrée.

Papi Théo achète désormais ses boîtes de chocolats par lot. Un *lot* (h_1, h_2, \dots, h_d) de boîtes de chocolats est un ensemble de d boîtes de taille h_1, h_2, \dots, h_d avec $0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_d$. Papi Théo cherche des lots tels qu'il peut choisir l'ordre de distribution des boîtes afin d'obtenir une distribution équitable. Il déclare donc qu'un lot est *raisonnable* si l'on peut trouver une permutation (b_1, b_2, \dots, b_d) des tailles des boîtes du lot qui donne un mode de distribution équitable. Par exemple, pour $n = 4$ et $d = 4$, un lot $(1, 1, 3, 3)$ est raisonnable car en choisissant $(b_1, b_2, b_3, b_4) = (1, 3, 1, 3)$ on obtient un mode de distribution équitable. En revanche, $(0, 1, 1, 3)$ n'est pas un lot raisonnable.

5. Si l'on fixe l'entier n , quelles sont les valeurs de d pour lesquelles tous les lots possibles sont raisonnables?

6. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un lot donné soit raisonnable?

7. On suppose que pour tout entier j , $b(j) = j^2$. La distribution est-elle équitable? Et avec $b(j) = j^k$ pour un autre entier k ?

8. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

8. LOS ANGELES

La ville de Los Angeles est une grille triangulaire infinie où chaque triangle équilatéral de côté 1 est un immeuble, comme sur la figure 14. Un *quartier* de cette ville est un ensemble fini d'immeubles. Deux immeubles ayant un côté en commun sont dits *voisins*.

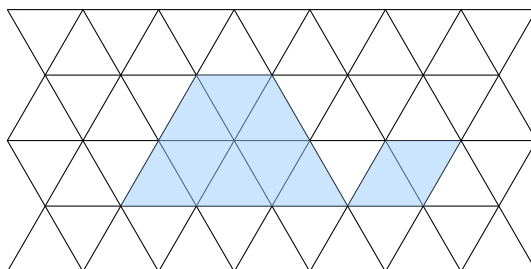


FIGURE 14. Un quartier de la ville de Los Angeles.

Lamia est maire de Los Angeles. Elle veut partitionner les quartiers de sa ville en copropriétés, qui sont des losanges formés par deux immeubles voisins. Une telle partition d'un quartier Q est appelée une *losangisation*. Le nombre de losangisations possibles d'un quartier Q est notée $\text{Los}(Q)$. Par exemple, pour la figure 14, on a $\text{Los}(Q) = 0$ car il est impossible de losangiser le quartier bleu. Pour la figure 15, on a $\text{Los}(Q) = 1$ car il existe une unique manière de losangiser le quartier orange.

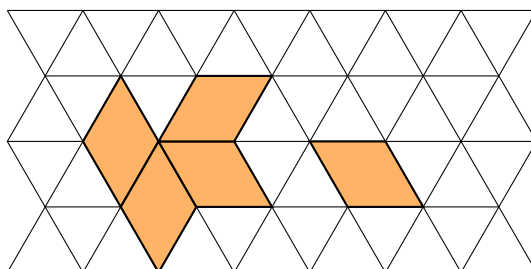


FIGURE 15. Losangisation d'un quartier.

1. Si le quartier Q est de l'une des formes suivantes, est-il possible de losangiser ce quartier ? Dans ce cas, combien de losangisations sont possibles ? Sinon, combien de copropriétés peut-on former au maximum ?

- (a) Un triangle équilatéral de côté n .
- (b) Un losange de côté n .
- (c) Un losange de côté n dont on a enlevé deux immeubles.

Dans le dernier cas, adapter la réponse selon la position des immeubles enlevés.

Afin de savoir si une losangisation est possible, Lamia demande des informations supplémentaires sur les quartiers de la ville. Deux immeubles d'un même quartier Q sont dits de même *type* s'ils sont orientés dans la même direction et si leurs voisins dans le quartier Q sont sur les mêmes côtés. Par exemple, dans la figure 16, les immeubles 1 et 6 sont de même type, de même que les immeuble 2 et 4. Tous les autres immeubles sont uniques.

Dans un quartier Q qu'elle ne connaît pas, Lamia connaît le nombre d'immeubles de chaque type. Cette information est notée I . Par exemple, dans la figure 16, elle sait qu'il y a exactement deux immeubles du type "pointant vers le haut, avec un unique voisin en haut à droite", aucun immeuble du type "pointant vers le haut, sans voisin", etc.

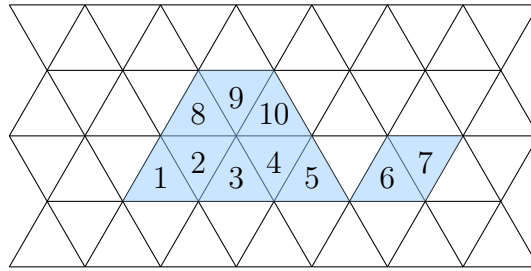


FIGURE 16. Exemple de types d'immeubles.

2. Chercher des conditions nécessaires sur I pour que le quartier soit losangisable. Chercher des conditions suffisantes. Est-il possible de trouver des conditions nécessaires et suffisantes sur I ?

3. Dédurre de I des encadrements aussi précis que possible de $\text{Los}(Q)$.

La *valence* d'un immeuble est le nombre de voisins de cet immeuble qui sont dans le même quartier. Pour $0 \leq i \leq 3$ on note $V_i(Q)$ le nombre d'immeubles de valence i dans Q .

4. Quels sont les quadruplets $(V_0(Q), V_1(Q), V_2(Q), V_3(Q))$ possibles dans le cas où :

(a) Q est un quartier quelconque ?

(b) Q est un quartier losangisable ?

5. Proposer et étudier d'autres pistes de recherche.

* * *